向量形式的基于拉格朗日方程的刚体动力学建模

动力学建模流程：定义广义坐标 →求系统中各刚体的动能 → 求系统中各刚体的势能 → 根据拉格朗日方程的形式，列写系统的动力学方程。

具体到我们的双足机器人：

一、定义广义坐标

前面说到，机器人本身共有20个广义坐标，它们定义了机器人作为一个系统，内部各个刚体之间的相对运动，以及机器人本体与地面（世界坐标系）之间的相对运动。在本章的刚体动力学建模中，为了简化计算，我们只考虑机器人下肢的平移和旋转运动，且忽略它在冠状面和横截面上的运动。在上述简化下的机器人广义坐标共9个，分别为：

3个全局广义坐标，描述机器人与世界坐标系的关系：

* ，机器人沿世界坐标系X轴的平移（前进/后退）；
* ，机器人沿世界坐标系Y轴的平移（上升/下降）；
* ，机器人在矢状面的旋转（后仰/前倾）；

以及6个设计机器人本体运动的广义坐标，描述机器人下肢髋、膝、踝的旋转运动：

* ，机器人右髋关节在矢状面的旋转（前屈/后伸）；
* ，机器人右膝关节的旋转（前伸/后屈）；
* ，机器人右踝关节在矢状面的旋转（背屈/跖屈）；
* ，机器人左髋关节在矢状面的旋转（前屈/后伸）；
* ，机器人左膝关节的旋转（前伸/后屈）；
* ，机器人左踝关节在矢状面的旋转（背屈/跖屈）。

上述9个广义坐标，如下图所示。它们共同构成描述这个双足机器人系统的广义坐标向量：



该广义坐标对应简化后机器人系统的9个自由度。



向量形式的拉格朗日方程写为

，

其中为拉格朗日函数，为系统总动能（包括每个刚体的平动动能和转动动能），为系统总位能（是每个刚体的重力位能）；为广义坐标向量；为广义力列向量。将代入上式，得

。

二、求系统总动能

若仅考虑双足机器人在二维矢状面下的运动，则可以将双足机器人系统的刚体数目简化为7个，标号从1~7分别为：机器人上肢躯干部分（UB）、右侧大腿部分（rf）、右侧小腿部分（rt）、右足（rc）、左侧大腿部分（lf）、左侧小腿部分（lt）、左足（lc）。

那么，对于系统中的第j个刚体，其动能包括转动动能和平动动能两部分：



其中和分别为第j个刚体绕自身重心的转动惯量和质量。为第j个刚体与竖直方向的夹角，其与广义坐标的换算关系如下：



为刚体的重心相对世界坐标系的坐标，可根据前面DH参数表中，上述刚体间在矢状面的齐次变换关系计算得到。

因此，系统总动能可以写为



三、求系统总位能

在这个双足机器人系统中，因为只存在重力位能，所以第j个刚体的位能可写为



其中g为重力加速度。

那么系统总体的位能为



四、求解机器人系统动力学方程

我们前面将双足机器人的动力学方程写为



下面将对该式中左侧的、、、，以及右侧的广义力分别进行推导。

对于左侧第一项，首先系统动能对求偏导，有



再对时间求导，有



其中为系统的对角质量矩阵



为雅克比矩阵，形式为



其中



为系统的惯性矩阵，其形式为



对于等式左侧第二项，有



这是因为机器人系统的重力位能之和机器人的构型（广义坐标的值）有关，而和速度无关。

对于等式左侧第三项，将系统动能对广义坐标向量求偏导，得到



对于左侧第四项，将系统势能对广义坐标向量求导，得到



其中



对于广义力向量，根据虚功原理，有



考察这个双足机器人系统，收到的外力只有地反力，包括垂直向上的正压力和水平方向的正压力。我们考虑足部存在脚跟和脚尖两个受力点，则可以画出下面的受力图：



机器人受到的外力表示为受到地反力，其中下标表示左脚（l）或右脚（r），表示脚跟（heel）或脚尖（toe），表示正压力（n）或摩擦力（f）。

那么虚功原理可以继续写为



其中，为关节力矩向量，为地反力向量，为雅克比矩阵。它们的具体形式分别为



这里和分别表示左右脚跟脚尖相对于世界坐标系的水平和竖直位移，可根据人体重心坐标、各关节转角以及模型中相关刚体的长度信息求得：



因此，广义力向量可写为



综上所述，我们求出了双足机器人系统的动力学方程各项的结果。将这些结果去全部代入，得到：



化简合并后，形式可写为



其中为系统质量矩阵，为系统科氏力和离心力矩阵，为重力项，具体形式为



至此，简化的双足机器人多刚体动力学方程求解完毕。

五、足地接触力（地反力）的建模

地面施加于脚跟或脚尖的反作用力由垂直于地面向上的正压力和平行于地面且与运动趋势反向的摩擦力组成。其中，正压力通过Hunt-Crossley模型描述：



式中为刚度系数，为耗散系数，表示脚跟或脚尖与地面接触的深度（不接触时为零），下标表示左脚（l）或右脚（r）。Hunt-Crossley模型描述了两个球体碰撞过程中的动力学响应。在我们的足地接触模型中，人体脚跟和脚尖均被视为半径3 cm的弹性球，而地面被视为半径无穷大的弹性球。

地面对脚跟或脚尖施加的摩擦力表示为



其中、、分别为静摩擦系数、动摩擦系数和粘性摩擦系数；为切换速度，表示静摩擦与动摩擦切换的速度阈值，此时摩擦力达到峰值；为脚跟或脚尖与地面接触点处的切向滑移速度